

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

рівень: *магістр*

на тему «**Про розширення одного класу стабілізуючих керувань
для канонічних нелінійних систем**»

Виконав: студент групи МП-62
II курсу (другий магістерський
рівень), спеціальності 113
“Прикладна математика”
освітньо-професійної програми
“Прикладна математика”
Козак Г. С.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Бєбія М.О.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник відділу
математичної фізики
Фізико-технічного інституту
низьких температур імені
Б. І. Веркіна НАН України
Гукалов О.О.

Анотації

Козак Георгій Сергійович. Про розширення одного класу стабілізуючих керувань для канонічних нелінійних систем.

У роботі розглядається задача розширення одного класу стабілізуючих керувань для двовимірних канонічних нелінійних систем. Даний клас стабілізуючих керувань було запропоновано і досліджено в працях мого наукового керівника та його співавторів у n -вимірному випадку. За рахунок представлення похідної функції Ляпунова у вигляді квадратичної форми зі змінною матрицею, було показано, що коефіцієнти стабілізуючого керування можуть бути довільними від'ємними числами. Використавши метод функції керованості, отриманий результат було застосовано для стабілізації за скінченний час.

Ключові слова: стабілізація, нелінійні керовані системи, метод функції Ляпунова, метод функції керованості, задача синтезу, критичний випадок.

Kozak Heorhii. On the Extension of a Class of Stabilizing Controls for Canonical Nonlinear Systems.

The paper addresses the problem of extending a class of stabilizing controls for two-dimensional canonical nonlinear systems. This class of stabilizing controls was proposed and studied in the works of my academic supervisor and his co-authors for the n -dimensional case. By representing the derivative of the Lyapunov function as a quadratic form with a variable matrix, it was demonstrated that the coefficients in the stabilizing control can be arbitrary negative values. Using the controllability function method, the obtained result was applied to achieve finite-time stabilization.

Keywords: stabilization, nonlinear control system, Lyapunov function method, controllability function method, synthesis problem, critical case.

Зміст

| | |
|--|----|
| Вступ..... | 4 |
| Розширення класу стабілізуючих керувань для двовимірної нелінійної системи | 6 |
| 1.1. Оцінка похідної функції Ляпунова | 7 |
| 1.2. Приклад..... | 10 |
| Розв'язок задачі синтезу | 12 |
| 2.1. Оцінка похідної функції керованості | 13 |
| 2.2. Обмеженість керування | 18 |
| 2.3. Приклад..... | 19 |
| Висновки | 22 |
| Список використаних джерел | 23 |
| Додатки..... | 24 |

Вступ

Керовані нелінійні системи особливо активно вивчаються останні кілька десятиріч [1]. Особливий інтерес викликають системи з некерованим першим наближенням [2-7]. Для стабілізації таких систем запропоновано різні ефективні підходи, які ґрунтуються, зокрема, на покроковій побудові керувань [6, 7]. Ці підходи дозволяють досліджувати широкий клас нелінійних систем, в той же час їх доволі складно реалізувати на практиці для систем високої розмірності. Інший підхід до стабілізації таких систем пов'язаний з використанням квадратичної функції Ляпунова в сингулярному випадку [2, 3], що дозволяє легко досліджувати системи високої розмірності.

А саме, в роботах Бебії М. О. та Коробова В. І. [2, 3] було досліджено нелінійну некеровану за першим наближенням систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}^{2k_{i-1}+1} + f_{i-1}(t, x, u), \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Клас стабілізуючих керувань у цих роботах було запропоновано обирати у вигляді:

$$u(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} x_1^{2k_1+1} + \dots + a_{2n-1} x_{n-1}^{2k_{n-1}+1}.$$

Коефіцієнти a_i обиралися особливим чином в залежності від функції Ляпунова, так щоб досягти від'ємної визначеності виразу для похідної функції Ляпунова в силу відповідної замкнутої системи.

У даній кваліфікаційній роботі цей підхід модифіковано для випадку двовимірних систем за рахунок представлення функції Ляпунова у вигляді похідної зі змінною матрицею. Це дозволило показати, що в якості коефіцієнтів у хвостовій частині керування можна обирати будь-які від'ємні числа (a_3 – довільне від'ємне число, $n = 2$). Результати щодо стабілізації представлено в першому розділі роботи.

В кінці 70-х років В. І. Коробовим був запропонований метод функції керованості [8, 9], який дозволяє розвинути результати щодо стабілізації і розглядати задачу стійкого потрапляння в точку спокою за скінченний час.

Цей підхід дає можливість розв'язувати задачу побудови класів обмежених керувань, яка називається задачею синтезу обмежених керувань.

У роботі [4] метод функції керованості було застосовано для розв'язання задачі синтезу обмежених керувань для випадку n -вимірних канонічних нелінійних систем з однією степеневою нелінійністю. У роботі [5] розв'язано задачу стабілізації за скінченний час для канонічних нелінійних систем з двома степеневими нелінійностями.

У другому розділі кваліфікаційної роботи, з використанням методу функції керованості, показано, що можна розширити клас синтезуючих керувань з роботи [4] для випадку двовимірних нелінійних канонічних систем. Використаний для розширення класу синтезуючих керувань підхід є аналогічним до вже згаданого підходу з першого розділу. Отримані результати проілюстровано на модельних прикладах.

Розділ 1

Розширення класу стабілізуючих керувань для двовимірної нелінійної системи

В цьому розділі розглядається задача стабілізації нелінійної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, \end{cases}$$

яка полягає у знаходженні керування у вигляді $u = u(x_1, x_2)$ такого, що нульова точка спокою відповідної замкнутої системи буде асимптотично стійкою по Ляпунову [1].

В роботах Бєбії М. О. та Коробова В. І. [2, 3] було запропоновано наступний вигляд стабілізуючого керування

$$u(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^3, \quad (1)$$

де $a_1, a_2 < 0$. Від'ємна константа a_3 обиралась особливим чином, в залежності від функції Ляпунова.

Функцію Ляпунова в роботах [2, 3] вдалося знайти у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = (Fx, x), \quad (2)$$

де F – додатно визначена квадратна матриця. Позначимо її елементи наступним чином:

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

У роботах [2, 3] від'ємний параметр a_3 обирався наступним чином

$$a_3 = -\frac{f_{22} a_1}{f_{11} a_2}. \quad (3)$$

Далі в цьому розділі буде показано, що в якості параметру a_3 можна вибрати будь-яке від'ємне число. Таким чином, ми розширюємо клас керувань вигляду (1), які стабілізують вихідну нелінійну систему. Для цього похідна функції Ляпунова буде оцінюватися через квадратичну форму зі змінною матрицею.

1.1. Оцінка похідної функції Ляпунова

Отже, оцінимо похідну функції Ляпунова (2) в силу наступної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \end{cases} \quad (4)$$

при $u = u(x_1, x_2)$ вигляду (1).

Далі будемо використовувати наступні позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Систему (4) при $u = u(x)$ вигляду (1) можна записати як

$$\dot{x} = Ax + \tilde{e}_1 x_1^3. \quad (5)$$

Використавши симетричність матриці F (тобто $F^* = F$) маємо

$$(Fx, \tilde{e}_1)x_1^3 = (x, F^* \tilde{e}_1)x_1^3 = (F\tilde{e}_1, x)x_1^3.$$

Тоді похідна функції Ляпунова (2) в силу системи (5) має вигляд

$$\dot{V} = (F\dot{x}, x) + (Fx, \dot{x}) = ((A^*F + FA)x, x) + 2(F\tilde{e}_1, x)x_1^3.$$

Нагадаємо, що $f_{11} > 0$, в силу додатної визначеності матриці F .

Будемо вимагати, щоб матриця $A^*F + FA$ була недодатно визначеною.

Використаємо вигляд матриці FA :

$$FA = \begin{pmatrix} f_{11}a_1 & f_{11}a_2 \\ f_{12}a_1 & f_{12}a_2 \end{pmatrix},$$

щоб отримати

$$A^*F + FA = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & f_{11}a_2 + f_{12}a_1 \\ f_{11}a_2 + f_{12}a_1 & 2f_{12}a_2 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Знайдемо Δ - визначник матриці $A^*F + FA$, який має бути невід'ємним. Отже

$$\begin{aligned} \Delta &= 4f_{11}f_{12}a_1a_2 - (f_{11}a_2 + f_{12}a_1)^2 = -f_{11}^2a_2^2 + 2f_{11}f_{12}a_1a_2 - f_{12}^2a_2^2 \\ &= -(f_{11}a_2 - f_{12}a_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Тоді $\Delta = 0$ або $f_{11}a_2 - f_{12}a_1 = 0$. Звідки знаходимо

$$f_{12} = \frac{a_2}{a_1} f_{11}. \quad (6)$$

Враховуючи (6), маємо наступні вирази для матриць:

$$A^*F + FA = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & 2f_{11}a_2 \\ 2f_{11}a_2 & 2f_{11}\frac{a_2^2}{a_1} \end{pmatrix} \leq 0, \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & \frac{a_2}{a_1}f_{11} \\ \frac{a_2}{a_1}f_{11} & f_{22} \end{pmatrix} \gg 0.$$

Введемо вектор b наступним чином

$$b = F\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} f_{11}a_3 + \frac{a_2}{a_1}f_{11} \\ \frac{a_2}{a_1}f_{11}a_3 + f_{22} \end{pmatrix}.$$

Скористаємось наступним представленням

$$b_1x_1^4 + b_2x_1^3x_2 = \left(b_1 - \frac{a_1}{a_2}b_2 + \frac{a_1}{a_2}b_2\right)x_1^4 + b_2x_1^3x_2.$$

Тоді враховуючи вигляд матриці $A^*F + FA$ похідна функції Ляпунова прийме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2f_{11}a_1 \left(x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2\right)^2 + 2b_1x_1^4 + 2b_2x_1^3x_2 \\ &= 2f_{11}a_1 \left(x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2\right)^2 + 2b_2\frac{a_1}{a_2} \left(x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2\right)x_1^3 + 2g_1x_1^4, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1 - \frac{a_1}{a_2}b_2 = f_{11}a_3 + \frac{a_2}{a_1}f_{11} - f_{11}a_3 - \frac{a_1}{a_2}f_{22} \\ &= -\frac{a_1}{a_2} \left(f_{22} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 f_{11}\right) < 0. \end{aligned}$$

Остання нерівність справедлива в силу додатної визначеності матриці F , звідки випливає

$$f_{11} > 0, \quad \Delta(F) = f_{11} \left(f_{22} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 f_{11}\right) > 0$$

Введемо у розгляд наступну матрицю зі змінними елементами:

$$G(x_1) = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & b_2\frac{a_1}{a_2}x_1 \\ b_2\frac{a_1}{a_2}x_1 & 2g_1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що визначник матриці $G(x_1)$ має вигляд

$$\Delta(G(x_1)) = 4f_{11}a_1g_1 - b_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 x_1^2.$$

Розглянемо вектор

$$r = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{a_2}{a_1} x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Тоді похідна функції Ляпунова прийме вигляд квадратичної форми зі змінною матрицею $G(x_1)$ відносно вектора r . А саме,

$$\dot{V} = (G(x_1)r, r) < 0 \quad (7)$$

при

$$4f_{11}a_1g_1 - b_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 x_1^2 > 0.$$

та $\|r\| \neq 0$. Будемо вимагати, щоб

$$x_1^2 < \frac{4f_{11}a_1g_1}{b_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2} \quad (8)$$

Тоді, враховуючи те, що $a_1 < 0, f_{11} > 0, g_1 < 0, \Delta(G(x_1)) > 0$, матриця $G(x_1)$ є від'ємно визначеною для всіх x_1 , що задовільняють нерівність (8).

Згідно теореми Ляпунова нерівність (7) гарантує асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи (4) при $u = u(x)$ вигляду (1).

Для знаходження оцінки області стабілізації достатньо знайти $c > 0$, при якому еліпсоїд $(Fx, x) = c$ належить полосі

$$x_1^2 < \gamma,$$

де

$$\gamma = -\frac{4f_{11}a_1 \frac{a_1}{a_2} \left(f_{22} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 f_{11}\right)}{\left(\frac{a_2}{a_1} f_{11} a_3 + f_{22}\right)^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2} = -\frac{4f_{11}a_2 \left(f_{22} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 f_{11}\right)}{\left(\frac{a_2}{a_1} f_{11} a_3 + f_{22}\right)^2} > 0.$$

Зауважимо, що якщо взяти точку всередині цього еліпсоїду, то траєкторія, яка відповідає цій початковій точці буде прямувати до нуля зі зростанням часу.

Аналогічно до результатів роботи [2], найбільший еліпсоїд вигляду $(Fx, x) = c$, що належить цій полосі, буде описуватися наступний чином:

$$\Phi = \left\{ x \in R^n: (Fx, x) < c, \quad c = \frac{\gamma}{(F^{-1}e_1, e_1)} \right\},$$

де F^{-1} – обернена матриця до F , $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $n = 2$, тоді

$$c = \det(F) \frac{\gamma}{f_{22}}.$$

Для візуалізації отриманих результатів у наступному розділі ми розглянемо конкретний чисельний приклад.

1.2. Приклад

Приклад. Виберемо наступні значення коефіцієнтів керування:

$$a_1 = -4, a_2 = -3, a_3 = -3.$$

Тоді стабілізуюче керування приймає вигляд:

$$u(x) = -4x_1 - 3x_2 - 3x_1^3.$$

Покладемо $f_{11} = 1, f_{22} = 2$. Тоді

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що матриця F є додатно визначеною. При такому виборі параметрів отримуємо, $\gamma = 276, c = 276 \times \frac{23}{32} = 198,375$.

Використовуючи мову програмування Python зобразимо еліпсоїдальну оцінку області стабілізації.

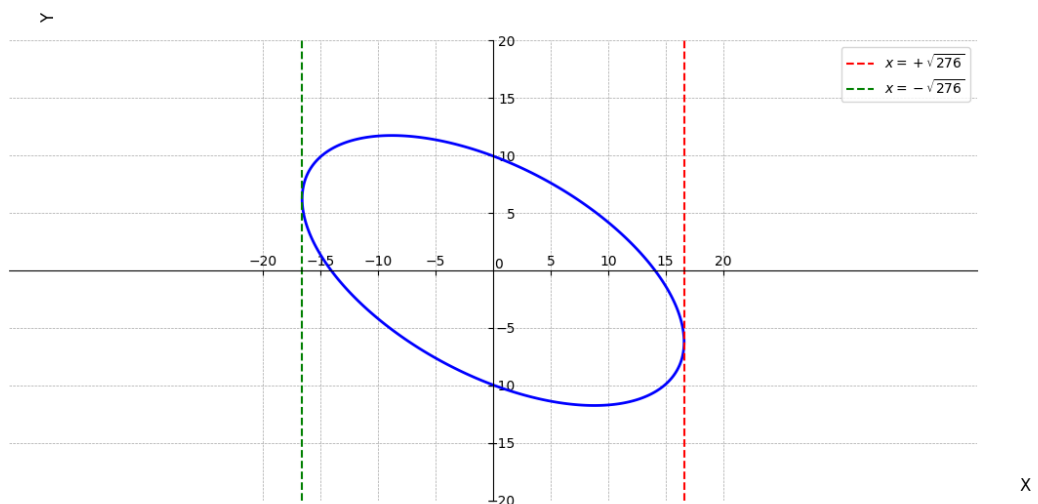


Рис. 1.1: Еліпсоїд $(Fx, x) = c$ при $c = 198.375$

В якості початкової точки візьмемо $(-10, 9)$. Зобразимо траєкторії $x_1(t)$ та $x_2(t)$, які виходять з цієї початкової точки.

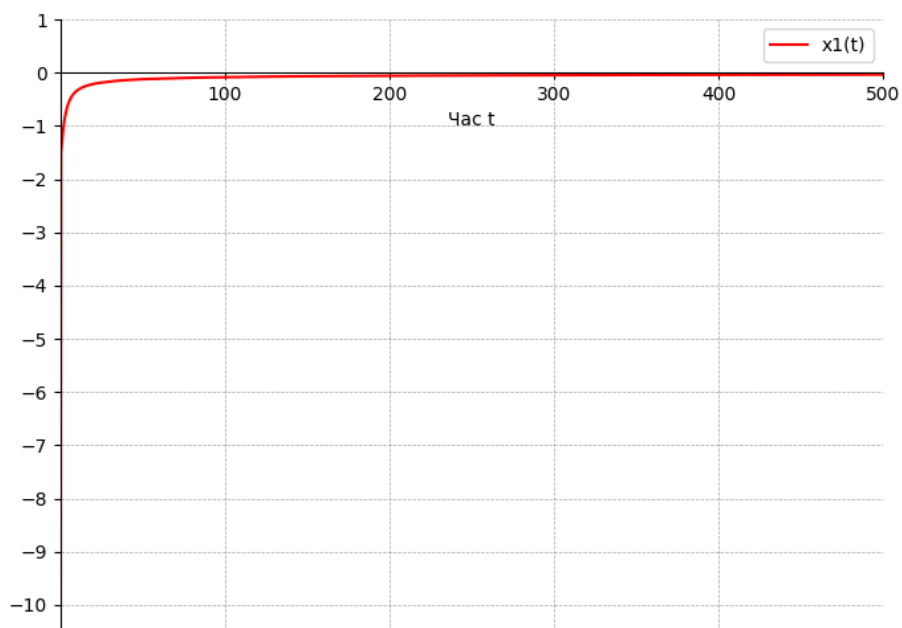


Рис. 1.2: Траєкторія $x_1(t)$.

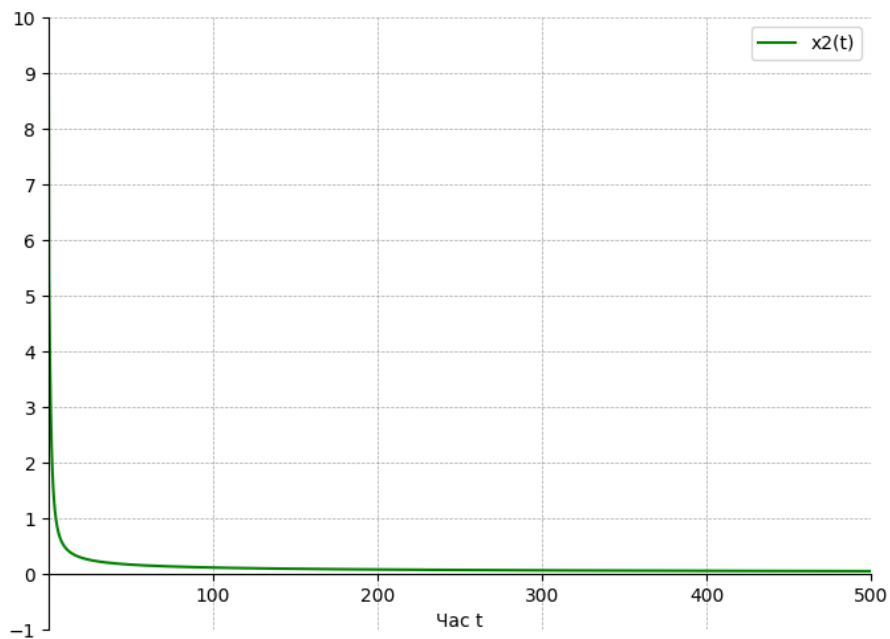


Рис. 1.3: Траєкторія $x_2(t)$.

Розділ 2

Розв'язок задачі синтезу

Використаємо результати розділу 1 для дослідження задачі синтезу обмежених керувань для системи (4). А саме, розглянемо задачу побудови обмежених позиційних керувань $u = u(x)$ таких, що розв'язок відповідної замкнутої системи із початковою умовою $x(0) = x_0$ потрапляє в початок координат за скінченний час $T(x_0)$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0,$$

де $x(t, x_0)$ – траєкторія замкнутої системи.

В роботі [4] показано, що керування вигляду:

$$u = \frac{a_1 x_1}{\theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\theta^4(x)} + \frac{a_3 x_1^3}{\theta^3(x)} \quad (9)$$

розв'язує задачу синтезу для системи (4) при додаткових обмеженнях на від'ємні коефіцієнти a_1, a_2, a_3 . Ці обмеження на a_i були такими ж як і для задачі стабілізації [2, 3]. Коефіцієнт a_3 обирався згідно умови (3). Далі ми покажемо, що в якості a_3 можна обирати будь-яке від'ємне число.

Розв'язок задачі синтезу із роботи [4] ґрунтувався на методі функції керованості В. І. Коробова [8, 9]. Основна ідея методу функції керованості полягає в тому щоб знайти додатно визначену функцію $\theta(x)$ і керування $u = u(x)$ такі, що похідна функції $\theta(x)$ в силу замкнутої керуванням $u(x)$ системи (4) задовольняє нерівність

$$\dot{\theta}(x) \leq -\gamma \quad (10)$$

для деякого $\gamma > 0$. Умова (10) забезпечує скінченність часу потрапляння розв'язку системи у початок координат. Більше того, справедлива наступна оцінка часу потрапляння у початок координат $T(x_0) \leq \frac{1}{\gamma} \theta(x)$.

Підставимо керування (9) в систему (4) і отримаємо наступну замкнуту систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{a_1 x_1}{\theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\theta^4(x)} + \frac{a_3 x_1^3}{\theta^3(x)}, \\ \dot{x}_2 = x_1^3. \end{cases} \quad (11)$$

В [4] функція керованості $\theta(x)$ для кожного $x \neq 0$ обиралася як єдиний додатний корінь рівняння.

$$2a_0\theta^8 = f_{11}x_1^2\theta^6 + 2f_{12}x_1x_2\theta^3 + f_{22}x_2^2. \quad (12)$$

При цьому $\theta(0) = 0$.

2.1. Оцінка похідної функції керованості

Знайдемо похідну функції керованості $\theta(x)$ в силу системи (11). Для цього продиференціюємо обидві частини рівності (12) та підставимо $\dot{x}_1 = u(x)$, $\dot{x}_2 = x_1^3$. Отже, маємо

$$\begin{aligned} 2a_0 8\theta^7 \dot{\theta} &= 2f_{11}x_1\dot{x}_1\theta^6 + f_{11}x_1^2 6\theta^5 \dot{\theta} + 2f_{12}\dot{x}_1(x_2\theta^3) \\ &+ 2f_{12}x_1(\dot{x}_2\theta^3 + 3x_2\theta^2\dot{\theta}) + 2f_{22}x_2\dot{x}_2 \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} (16a_0\theta^7 - 6f_{11}x_1^2\theta^5 - 6f_{12}x_1x_2\theta^2)\dot{\theta} &= 2f_{11}x_1\left(\frac{a_1x_1}{\theta} + \frac{a_2x_2}{\theta^4} + \frac{a_3x_1^3}{\theta^3}\right)\theta^6 \\ &+ 2f_{12}\left(\frac{a_1x_1}{\theta} + \frac{a_2x_2}{\theta^4} + \frac{a_3x_1^3}{\theta^3}\right)x_2\theta^3 + 2f_{12}x_1^4\theta^3 + 2f_{22}x_2x_1^3 \end{aligned}$$

Помножимо ліву та праву частини на θ та використаємо рівність

$$16a_0\theta^8 = 8f_{11}x_1^2\theta^6 + 16f_{12}x_1x_2\theta^3 + 8f_{22}x_2^2,$$

щоб отримати

$$\begin{aligned} (8f_{11}x_1^2\theta^6 + 16f_{12}x_1x_2\theta^3 + 8f_{22}x_2^2 - 6f_{11}x_1^2\theta^6 - 6f_{12}x_1x_2\theta^3)\dot{\theta} &= \\ = 2f_{11}a_1x_1^2\theta^6 + 2(f_{11}a_2 + f_{12}a_1)x_1x_2\theta^3 + 2a_2f_{12}x_2^2 & \\ + 2(f_{12}a_3 + f_{22})x_2x_1^3\theta + 2(f_{11}a_3 + f_{12})x_1^4\theta^4. & \end{aligned}$$

Отже, похідна функції керованості в силу системи (11) має вигляд

$$\dot{\theta} = \frac{2f_{11}a_1x_1^2\theta^6 + 2(f_{11}a_2 + f_{12}a_1)x_1x_2\theta^3 + 2a_2f_{12}x_2^2 + 2(f_{12}a_3 + f_{22})x_2x_1^3\theta}{2f_{11}x_1^2\theta^6 + 10f_{12}x_1x_2\theta^3 + 8f_{22}x_2^2} + \frac{2(f_{11}a_3 + f_{12})x_1^4\theta^4}{2f_{11}x_1^2\theta^6 + 10f_{12}x_1x_2\theta^3 + 8f_{22}x_2^2}.$$

Покажемо спочатку, що $\dot{\theta} < 0$. Як і в розділі 1 ми приходимо до наступної матричної нерівності

$$A^*F + FA = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & f_{11}a_2 + f_{12}a_1 \\ f_{11}a_2 + f_{12}a_1 & 2f_{12}a_2 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Тоді для недодатної визначеності будемо вимагати, щоб $\det(A^*F + FA) \geq 0$. Як було показано в розділі 1:

$$\det(A^*F + FA) = 4f_{11}a_1f_{12}a_2 - (f_{11}a_2 + f_{12}a_1)^2 = -(f_{11}a_2 - f_{12}a_1)^2 \geq 0.$$

Звідки знаходимо

$$f_{12} = \frac{f_{11}a_2}{a_1}.$$

Отже, $\det(A^*F + FA) = 0$. Оскільки $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $f_{11} > 0$ (в силу додатної визначеності матриці F), то маємо $2f_{11}a_1 < 0$, $2f_{12}a_2 = 2\frac{f_{11}a_2^2}{a_1} < 0$. Це гарантує недодатну визначеність матриці.

$$A^*F + FA = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & 2f_{11}a_2 \\ 2f_{11}a_2 & 2\frac{f_{11}a_2^2}{a_1} \end{pmatrix}$$

Очевидно, що

$$((A^*F + FA)y, y) = 2f_{11}a_1\left(y_1 + \frac{a_2}{a_1}y_2\right)^2 \leq 0,$$

де $y_1 = x_1\theta^3$, $y_2 = x_2$.

Як і в попередньому розділі. Будемо використовувати позначення

$$b_1 = f_{11}a_3 + \frac{a_2}{a_1}f_{11}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_1}f_{11}a_3 + f_{22}.$$

Тоді θ прийме наступний вигляд

$$\theta = \frac{2f_{11}a_1\left(y_1 + \frac{a_2}{a_1}y_2\right)^2 + 2b_2x_2x_1^3\theta + 2b_1x_1^4\theta^4}{(F^1y, y)},$$

де

$$F^1 = \begin{pmatrix} 2f_{11} & \frac{5f_{11}a_2}{a_1} \\ \frac{5f_{11}a_2}{a_1} & 8f_{22} \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що рівняння (12) має єдиний додатний розв'язок θ при кожному $x \neq 0$, якщо матриця F^1 – додатно визначена [4]. Отже, приходимо до наступної умови

$$f_{11} > 0, \quad \det F^1 = f_{11} \left(16f_{22} - 25f_{11} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right) > 0$$

або

$$f_{11} > 0, \quad f_{22} > \frac{25}{16} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 f_{11}. \quad (13)$$

Зауважимо, що умова (13) гарантує додатну визначеність матриці F .

Отже, будемо вважати, що f_{11} та f_{22} вибрано з умови (13). Не важко зрозуміти, що

$$b_1x_1^4\theta^4 + b_2x_1^3x_2\theta = \left(b_1 - \frac{a_1}{a_2}b_2 + \frac{a_1}{a_2}b_2 \right) x_1^4\theta^4 + b_2x_1^3x_2\theta.$$

Тоді для чисельника похідної функції керованості справедливе наступне представлення

$$\begin{aligned} & 2f_{11}a_1 \left(y_1 + \frac{a_2}{a_1}y_2 \right)^2 + 2b_2x_1^3x_2\theta + 2b_1x_1^4\theta^4 \\ &= 2f_{11}a_1 \left(y_1 + \frac{a_2}{a_1}y_2 \right)^2 + 2b_2 \frac{a_1}{a_2} \left(y_1 + \frac{a_2}{a_1}y_2 \right) x_1^3\theta \\ &+ 2g_1x_1^4\theta^4, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$g_1 = b_1 - \frac{a_1}{a_2}b_2 = f_{11}a_3 + \frac{a_2}{a_1}f_{11} - f_{11}a_3 - \frac{a_1}{a_2}f_{22}$$

$$= -\frac{a_1}{a_2} \left(f_{22} - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 f_{11} \right) < 0.$$

Остання нерівність справедлива, бо $a_1, a_2 < 0$ та F – додатно визначена.

Введемо до розгляду матрицю

$$G(x_1, \theta) = \begin{pmatrix} 2f_{11}a_1 & b_2 \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_1}{\theta} \\ b_2 \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_1}{\theta} & 2g_1 \end{pmatrix}.$$

Використавши (14), перепишемо чисельник похідної функції керуваності у вигляді

$$2f_{11}a_1 \left(y_1 + \frac{a_2}{a_1} y_2 \right)^2 + 2b_2 x_1^3 x_2 \theta + 2b_1 x_1^4 \theta^4 = (G(x_1, \theta)r, r),$$

$$\text{де } r = \left(y_1 + \frac{a_2}{a_1} y_2, \quad x_1^2 \theta^2 \right).$$

Вимога додатності визначника матриці $G(x_1, \theta)$ має вигляд

$$\Delta(G(x_1, \theta)) = 4f_{11}a_1g_1 - b_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \frac{x_1^2}{\theta^2} > 0.$$

Тоді для від'ємної визначеності матриці $G(x_1, \theta)$ має бути виконана умова

$$\frac{x_1^2}{\theta^2} < \frac{4f_{11}g_1}{a_1} \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2.$$

З рівності (12) випливає

$$2a_0\theta^8(x) \geq \lambda_{\min}(F)(x_1^2\theta^6(x) + x_2^2), \quad (15)$$

де $\lambda_{\min}(F) > 0$ – мінімальне власне значення матриці F . Звідки отримуємо

$$\frac{x_1^2}{\theta^2(x)} \leq \frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}, \quad \frac{x_2^2}{\theta^8(x)} \leq \frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}. \quad (16)$$

Будемо вимагати, щоб

$$\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} < \frac{4f_{11}g_1}{a_1} \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2.$$

Отже, виберемо a_0 з умови

$$0 < a_0 < \frac{2f_{11}g_1}{a_1} \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 \lambda_{\min}(F). \quad (17)$$

Оскільки $f_{11} > 0$, $a_1 < 0$, $g_1 < 0$, то умова (17) гарантує від'ємну визначеність матриці $G(x_1, \theta(x))$ при всіх $x \neq 0$. Звідки,

$$(G(x_1, \theta(x))r, r) < 0$$

для всіх r таких, що $\|r\| \neq 0$.

Таким чином, ми показали від'ємну визначеність $\dot{\theta}$. Справді

$$\dot{\theta} = \frac{(G(x_1, \theta(x))r, r)}{(F^1 y, y)} \leq \frac{\hat{\lambda}(x_1, \theta(x)) \left(\left(y_1 + \frac{a_2}{a_1} y_2 \right)^2 + x_1^4 \theta^4(x) \right)}{\lambda_{\max}(F^1)(y_1^2 + y_2^2)} < 0 \quad (18)$$

при $x \neq 0$, де $\lambda_{\max}(F^1) > 0$ – найбільше власне значення матриці F^1 , $\hat{\lambda}(x_1, \theta(x)) < 0$ – найбільше власне значення від'ємно визначеної матриці $G(x_1, \theta(x))$.

Аналогічно до результатів роботи [4], можна показати, що існує $\gamma > 0$ таке, що справедлива нерівність (10):

$$\dot{\theta}(x) \leq -\gamma.$$

Остання нерівність, згідно методу функції керованості, гарантує скінченність часу потрапляння розв'язку замкнутої системи (11) у початок координат. Нагадаємо, що для часу потрапляння $T(x_0)$ справедлива наступна оцінка

$$T(x_0) \leq \frac{1}{\gamma} \theta(x).$$

Для того, щоб довести згадану оцінку достатньо розглянути сімейство кривих $x_2 = C\theta^3(x)x_1$, $C \in R$. Підставимо цей вираз для x_2 у рівняння (12), звідки маємо

$$\frac{x_1^2}{\theta^2} = \frac{2a_0}{f_{11} + 2f_{11} \frac{a_2}{a_1} C + f_{22} C^2}.$$

Використовуючи таке представлення з нерівності (18) впливає

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &\leq \frac{\hat{\lambda} \left(\left(1 + \frac{a_2}{a_1} C\right)^2 x_1^2 \theta^6 + x_1^4 \theta^4 \right)}{\lambda_{\max}(F^1)(1 + C^2) y_1^2} \\ &= \frac{\hat{\lambda} \left(\left(1 + \frac{a_2}{a_1} C\right)^2 + \frac{2a_0}{f_{11} + 2f_{11} \frac{a_2}{a_1} C + f_{22} C^2} \right)}{\lambda_{\max}(F^1)(1 + C^2)} := h(C) < 0, \end{aligned}$$

де $\hat{\lambda}(x_1, \theta(x)) \leq \hat{\lambda} < 0$ при $a_0 < 0$, що задовольняє нерівності (17). Така константа $\hat{\lambda}$ знайдена в роботі [3].

Так як $h(C)$ неперервна та від'ємна для всіх $C \in R$, крім того,

$$\lim_{C \rightarrow \pm\infty} h(C) = \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_{\max}(F^1)} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 < 0.$$

Тоді, можна знайти $\gamma > 0$ таке, що нерівність (10) справедлива.

2.2. Обмеженість керування

Нехай задана наступна умова обмеженості керування

$$|u(x)| \leq d, \tag{19}$$

де $d > 0$ – задана константа.

Запишемо керування (9) у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{\theta^4(x)} (a, y(x)) + a_3 \frac{x_1^3}{\theta^3(x)},$$

де $a = (a_1, a_2)$.

Далі ми покажемо, що виконання умови (19) можна досягти за рахунок вибору достатньо малого $a_0 > 0$. Умову (15) можна записати у вигляді

$$2a_0 \theta^8(x) \geq \lambda_{\min}(F) \|y(x)\|^2,$$

звідки маємо

$$\frac{\|y(x)\|}{\theta^4(x)} \leq \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}}.$$

Таким чином, в силу (16), наступна оцінка є справедливою.

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{\theta^4(x)} \|a\| \cdot \|y(x)\| + |a_3| \cdot \frac{x_1^2}{\theta^2(x)} \left| \frac{x_1}{\theta(x)} \right| \\ &\leq \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)}} \left(\|a\| + |a_3| \frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} \right) := \Phi(a_0). \end{aligned}$$

Відмітимо, що $\Phi(a_0)$ є неперервною зростаючою функцією при $a_0 > 0$. Крім того, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{a_0 \rightarrow +\infty} \Phi(a_0) = +\infty$. Отже, робимо висновок, що існує єдине $a_0^* > 0$ таке, що $\Phi(a_0^*) = d$. Тоді

$$|u(x)| \leq \Phi(a_0^*) = d$$

при

$$0 < a_0 \leq a_0^*.$$

Таким чином, умова (19) виконана при такому виборі a_0 .

Зауважимо, що досягти одночасного виконання умов (17) та (19) можна за рахунок вибору a_0 з умови

$$0 < a_0 < \min \left\{ \frac{2f_{11}g_1}{a_1} \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2 \lambda_{\min}(F), a_0^* \right\}. \quad (20)$$

Як показано у розділі 2.1. такий вибір a_0 забезпечує виконання умови (10), що гарантує скінченність часу потрапляння у початок координат.

2.3. Приклад

Аналогічно до прикладу з розділу 1.2 оберемо наступні значення параметрів керування (9):

$$a_1 = -4, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -3.$$

Тоді керування (9) приймає вигляд

$$u = -\frac{4x_1}{\theta(x)} - \frac{3x_2}{\theta^4(x)} - \frac{3x_1^3}{\theta^3(x)}.$$

Нехай $d = 5$. Також покладемо $f_{11} = 1$, $f_{22} = 2$. Звідки, згідно з рівністю (6), $f_{12} = \frac{a_2}{a_1} f_{11} = \frac{3}{4}$.

Тепер оберемо a_0 так, щоб $|u(x)| \leq 5$ і виконувалася умова (17). Покладемо $a_0 = 0,1676625305$, що задовольняє умову (20). Це означає, що також виконуються умови (17) і (19). Тоді функція керуваності $\theta(x)$ є єдиним додатним розв'язком рівняння (12), яке має вигляд

$$0.335325061\theta^8 - x_1^2\theta^6 - \frac{3}{2}x_1x_2\theta^3 - 2x_2^2 = 0.$$

Розглянемо початкову точку $x_0 = (2, -3)$. Розв'язуючи це рівняння чисельно для початкової точки x_0 знаходимо значення $\theta(x_0) = 3,35493 \dots$. Таким чином, відповідна задача Коші для замкнутої системи (11) та початкової умови $x(0) = x_0$ приймає вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{4x_1}{\theta(x)} - \frac{3x_2}{\theta^4(x)} - \frac{3x_1^3}{\theta^3(x)}, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, \\ \dot{\theta} = \frac{-4x_1^2\theta^6 - 6x_1x_2\theta^3 - \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_2x_1^3\theta - \frac{9}{4}x_1^4\theta^4}{x_1^2\theta^6 + \frac{15}{4}x_1x_2\theta^3 + 8x_2^2}, \\ x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = -3, \quad \theta(0) = 3,354937837. \end{cases} \quad (21)$$

Згідно з чисельними розрахунками, оцінка часу потрапляння у початок координат має наступний вигляд:

$$T(x_1(0), x_2(0)) \leq 175,6599175.$$

Для задачі Коші (21) маємо наступний результат

$$\sqrt{x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1)} = 0.359916 \dots \times 10^{-7}$$

при $t_1 = 69,49$.

Побудуємо графіки розв'язків задачі Коші (21) та керування $u(x(t))$ з використанням бібліотек *numpy*, *scipy*, *matplotlib* мови програмування Python.

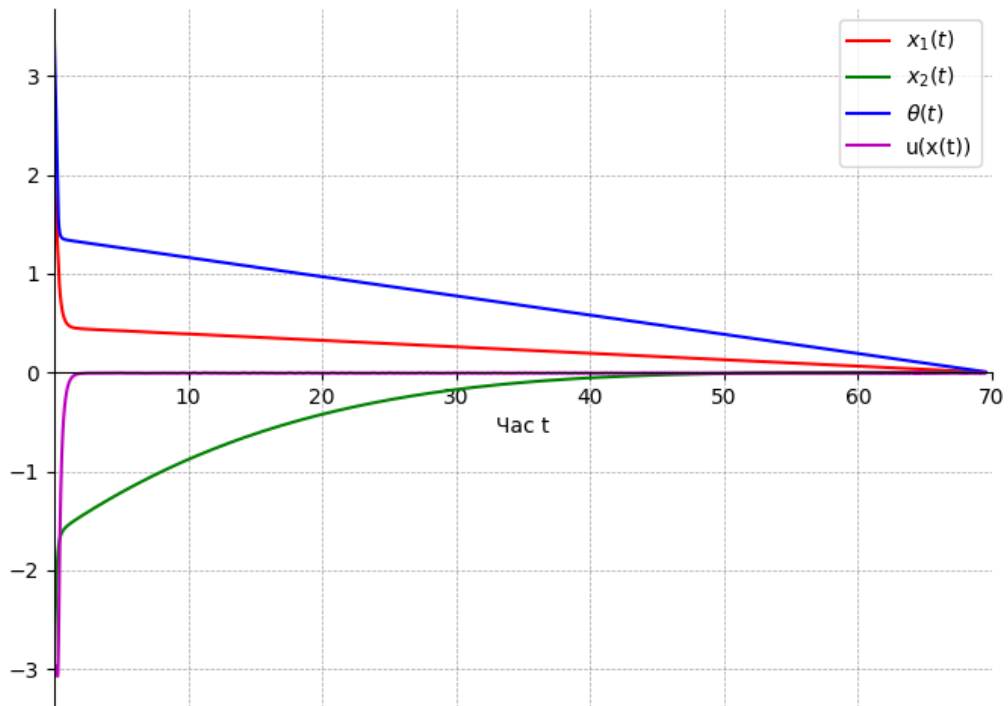


Рис. 2.1: Траєкторії $x_1(t)$, $x_2(t)$, функція $\theta(x(t))$ та керування $u(x(t))$.

Висновки

Таким чином, в даній роботі було розширено клас стабілізуючих керувань, запропонований в працях Бебії М. О. та Коробова В. І. для нелінійних некерованих за першим наближенням систем спеціального вигляду. Похідну функції Ляпунова було представлено у вигляді квадратичної форми зі змінною матрицею, після чого, знайдено окіл в якому ця похідна менша нуля. Такий підхід дозволив розширити клас стабілізуючих керувань. А саме, було показано, що коефіцієнти керування можна обирати довільними від'ємними числами. Застосувавши метод функції керованості отриманий результат було використано для розв'язання задачі синтезу обмежених керувань. Справедливість отриманих результатів була продемонстрована на модельних прикладах. Даний підхід може бути використаний для дослідження нелінійних систем більш високої розмірності.

Список використаних джерел

- [1] Khalil H.K., Nonlinear Systems, Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 2002, P. 750.
- [2] Bebiya M.O., V.I. Korobov, On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2016, Vol. 12, No. 2, P. 113-133.
- [3] Korobov V.I. and M.O. Bebiya, Stabilization of one class of nonlinear systems // Automation and Remote Control. 2017, Vol. 78, No. 1. P. 1–15.
- [4] Bebiya M.O, Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2015, Vol. 81, P. 36-51.
- [5] M.O. Bebiya, On the bounded control synthesis for three-dimensional high-order nonlinear systems, Bukovinian Mathematical Journal, 2023, Vol. 11, No. 2, P. 11-23.
- [6] Coron J.-M., Praly L. Adding an integrator for the stabilization problem. // Systems Control Lett. 1991, Vol. 17, No. 2 , P. 89-104.
- [7] Lin W., Qian C. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems. Systems Control Lett. 2000, Vol. 39 No. 5, P. 339-351.
- [8] Korobov V.I., A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. Math USSR Sb. 1980, Vol. 37 No. 4, P. 535-557.
- [9] Korobov V.I., Sklyar G.M. Methods for constructing positional controls and an admissible maximum principle. Differential Equations. 1990, Vol. 26, P. 1422-1431.

Додатки

У цьому розділі наведено програму для чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь та побудови графіків на мові Python.

Лістинг 3.1: Побудова розв'язків задачі Коші та керування для системи (21)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from matplotlib.ticker import MaxNLocator

# Визначаємо систему рівнянь
def system(t, y):
    x1, x2, theta = y
    num = -1 / 4 * x2 * (x1**3) * theta - 9 / 4 * (x1**4) * (theta**4) - 9 / 4 * (x2**2) - 6 * x1 *
    x2 * (theta**3) - 4 * (x1**2) * (theta**6)
    denom = (x1**2) * (theta**6) + 15 / 4 * x1 * x2 * (theta**3) + 8 * (x2**2)
    dx1dt = -4 * x1 / theta - 3*x2 / (theta**4) - 3 * (x1**3) / (theta**3)
    dx2dt = x1**3
    dthetadt = num / denom
    return [dx1dt, dx2dt, dthetadt]

# Початкові умови
y0 = [2, -3, 3.354937837] # x1(0) = 2, x2(0) = -3, theta(0) = 3.354937837
t_span = (0, 69.49) # Інтервал часу

# Розв'язок системи диференціальних рівнянь
sol = solve_ivp(system, t_span, y0, t_eval=np.linspace(0, 69.49, 2000))

# Побудова графіка
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

# Побудова графіків для кожної компоненти
```



```

ax.plot(sol.t, sol.y[0], label='$x_1(t)$', color='r')
ax.plot(sol.t, sol.y[1], label='$x_2(t)$', color='g')
ax.plot(sol.t, sol.y[2], label=r'$\theta(t)$', color='b')
ax.plot(sol.t, -4 * sol.y[0] / sol.y[2] - 3*sol.y[1] / (sol.y[2]**4) - 3 * (sol.y[0]**3) / (sol.y[2]**3),
label='u(x(t))', color='m')

# Налаштування вигляду вісей
ax.spines['top'].set_visible(False) # Прибираємо верхню рамку
ax.spines['right'].set_visible(False) # Прибираємо праву рамку
ax.spines['bottom'].set_position('zero') # Переміщуємо вісь X до центру
ax.spines['left'].set_position('zero') # Переміщуємо вісь Y до центру

# Встановлюємо мітки поруч із перетином осей
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom') # Мітки залишаються знизу
ax.yaxis.set_ticks_position('left') # Мітки залишаються зліва

# Налаштування відображення міток: виключаємо два нулі
xticks = np.linspace(0, 70, 8) # Створюємо мітки для осі X
yticks = np.linspace(-3, 3, 7) # Створюємо мітки для осі Y

# Якщо на графіку є нуль на обох вісях, видаляємо його на вісі X
xticks = xticks[xticks != 0] # Видаляємо нуль з вісі X
# yticks = yticks[yticks != 0] # Видаляємо нуль з вісі Y

# Встановлюємо нові мітки
ax.set_xticks(xticks)
ax.set_yticks(yticks)

# Обмежуємо вісь X від нуля і вправо
ax.set_xlim([0, 70]) # Встановлюємо межі осі X від 0 до 70

# Додаємо підписи та сітку

```

```
ax.set_xlabel("Час t")
```

```
ax.legend()
```

```
ax.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5, alpha=0.7)
```

```
plt.show()
```
